CHAPITRE 1

Fonctions holomorphes

1.1 Fonctions Complexes

Définition 1.1.1 *On appelle fonction complexe à une variable complexe, une application de* $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}$.

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & f(z) \end{array}$$

Remarque 1.1.1 *Posons :* $z = x + iy$ *et* $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$, *où* $\mathscr{R}e\, f(z) = P(x,y)$ *et* $\mathscr{I}m\ f(z) = Q(x,y)$, *on est donc ramené à une application* φ *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$, *et ceci en posant* $\varphi(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$.

Limite :
Soit f une fonction complexe à une variable complexe ; on dit que f admet une limite ℓ en $z_0 = x_0 + iy_0$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } |z - z_0| < \eta \implies |f(z) - \ell| < \varepsilon$$

On note $\lim\limits_{z \longrightarrow z_0} f(z) = \ell$.
Posons alors $\ell = a + ib$ où a et b sont deux réels, alors ;
$|f(z)-\ell| = |P(x,y)+iQ(x,y)-a-ib| = |(P(x,y)-a)+i(Q(x,y)-b)| \leqslant |P(x,y)-a|+|Q(x,y)-b|$.
On a en plus :
$|P(x,y) - a| \leqslant \sqrt{(P(x,y)-a)^2 + (Q(x,y)-b)^2} = |f(z) - \ell|$ et $|Q(x,y) - b| \leqslant |f(z) - \ell|$.
Ces inégalités prouvent que :

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = \ell, \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{(x,y) \longrightarrow (x_0,y_0)} P(x,y) = a, \\ \lim\limits_{(x,y) \longrightarrow (x_0,y_0)} Q(x,y) = b. \end{cases}$$

On a aussi :

- $\lim\limits_{z \longrightarrow \infty} f(z) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0$ tel que $|z| > A \implies |f(z) - \ell| < \varepsilon$.
- $\lim\limits_{z \longrightarrow z_0} f(z) = \infty \iff \forall A > 0,\ \exists \eta > 0$ lel que $|z - z_0| < \eta \implies |f(z)| > A$.
- $\lim\limits_{z \longrightarrow \infty} f(z) = \infty \iff \forall A > 0,\ \exists B > 0$ tel que $|z| > B \implies |f(z)| > A$.

Continuité :
f est dite continue en z_0, si elle admet une limite en z_0 et que cette limite vaut $f(z_0)$.
Propriétés :
- si f et g sont continues en z_0 alors, $f+g, f.g, f\circ g$ et $\dfrac{f}{g}$ $(g(z_0)\neq 0)$ le sont aussi.
- f continue en $z_0 \Longleftrightarrow P, Q$ sont continues en (x_0, y_0).

1.2 Fonctions Holomorphes

On note $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z-z_0| < r,\ r>0\}$.
$D(z_0, r)$ est appelé disque ouvert de centre z_0 et de rayon r.
$\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z-z_0| \leqslant r,\ r>0\}$.
$\overline{D}(z_0, r)$ est appelé disque fermé de centre z_0 et de rayon r.

Définition 1.2.1 *Soit f une application de $D(z_0, r)$ dans $\mathbb{C}$. On dit que f est holomorphe en z_0 si $\lim\limits_{z\longrightarrow z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe, et dans ce cas elle sera notée $f'(z_0)$.*

$$f : \text{holomorphe en} z_0 \Longleftrightarrow f : \textit{dérivable en } z_0.$$

Propriétés :
- $(f+g)' = f'+g'$ • $(f.g)' = f'.g + f.g'$ • $(f\circ g)' = (f'\circ g).g'$

1.2.1 Conditions de Cauchy-Riemann

Donnons une condition nécessaire de dérivabilité d'une fonction f dérivable en z_0.
f dérivable en z_0 donc $\lim\limits_{z\longrightarrow z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe.
Posons $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ et $z_0 = (x_0, y_0)$, on a alors :
$$f'(z_0) = \lim_{z\longrightarrow z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} \left[\frac{P(x,y)-P(x_0,y_0)}{(x-x_0)+i(y-y_0)} + i\frac{Q(x,y)-Q(x_0,y_0)}{(x-x_0)+i(y-y_0)}\right].$$
fixons $y = y_0$ on a :
$$f'(z_0) = \lim_{x\longrightarrow x_0} \left[\frac{P(x,y_0)-P(x_0,y_0)}{x-x_0} + i\frac{Q(x,y_0)-Q(x_0,y_0)}{x-x_0}\right] = P'_x(x_0,y_0) + iQ'_x(x_0,y_0).$$
fixons $x = x_0$ on a :
$$f'(z_0) = \lim_{y\longrightarrow y_0} \left[\frac{P(x_0,y)-P(x_0,y_0)}{i(y-y_0)} + i\frac{Q(x_0,y)-Q(x_0,y_0)}{i(y-y_0)}\right] = -iP'_y(x_0,y_0) + Q'_y(x_0,y_0).$$
Comme la dérivée est unique, on a nécessairement :
$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) \end{cases}}$$

Ces deux conditions, sont appelées «conditions de Cauchy-Riemann ».
Énonçons, sans démonstration, un théorème important :

Théorème 1.2.1 *La fonction $z \longmapsto f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ est différentiable dans le champ complexe, au point $z_0 = x_0 + iy_0$* **si et seulement si**, *les fonctions $(x,y) \longmapsto P(x,y)$ et $(x,y) \longmapsto Q(x,y)$ sont différentiables au point (x_0, y_0) et si leurs dérivées vérifient les conditions de Cauchy-Riemann.*

La dérivée, donc en un point z quelconque est donnée par :

$$\boxed{\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \\ &= \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \end{aligned}}$$

exemples :
• 1. $f(z) = z^2$
$f(z) = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$ d'où :

$$\begin{cases} P(x,y) &= x^2 - y^2 \\ Q(x,y) &= 2xy \end{cases}$$

On a :
$\dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 2x = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x,y)$ et aussi $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -2y = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$
f est donc dérivable, et $f'(z) = 2x + 2iy = 2(x+iy) = 2z$;

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f'(z) = 2z.$$

1.2.2 Propriétés

1. Remarquons qu'on a,
$\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial (P+iQ)}{\partial x} + i\dfrac{\partial (P+iQ)}{\partial y} = \left(\dfrac{\partial P}{\partial x} - \dfrac{\partial Q}{\partial y}\right) + i\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} + \dfrac{\partial P}{\partial y}\right) = 0.$
Une forme condensée des conditions de Cauchy-Riemann est :

$$\boxed{\forall\, (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \;\; \frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0.} \tag{1.1}$$

2. On a aussi :

$$df(z) = \frac{\partial f}{\partial z}\; dz + + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\, d\overline{z}.$$

Comme,

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \overline{z}}. \tag{1.2}$$

$$\text{et} \quad \begin{cases} x = \dfrac{z + \overline{z}}{2} \\ y = \dfrac{z - \overline{z}}{2i} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \overline{z}} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \overline{z}} = -\dfrac{1}{2i} \end{cases}$$

En substituant ces dernières relations dans (1.2) et en utilisant (1.1), on a :

$$\boxed{f \text{ dérivable} \Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.}$$

Finallement, f dérivable $\Longrightarrow df(z) = \dfrac{\partial f}{\partial z}\, dz = f'(z)dz$.

Donc, si f est dérivable, $f(z)$ ne doit pas contenir de termes en $\overline{z}$, $\Big($aussi ni $\mathscr{R}e\, z = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$, ni $\mathscr{I}m\, z = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$, ni $|z| = \sqrt{z\,\overline{z}}\Big)$.

exemple :

Soit

$$f: \quad \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto \frac{1}{z} + z\,\mathscr{R}e\, z.$$

On a alors, $f(z) = \dfrac{1}{z} + z\,\mathscr{R}e\, z = \dfrac{1}{z} + z\dfrac{z+\overline{z}}{2}$, et donc $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \dfrac{z}{2} \neq 0$, d'où la fonction f n'est pas dérivable.

On peut le vérifier directement à l'aide des conditions de Cauchy-Riemann.

On a $f(z) = f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y) = \dfrac{x(1+x^3+xy^2)}{x^2+y^2} + i\dfrac{y(-1+x^3+xy^2)}{x^2+y^2}$.

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial \dfrac{x(1+x^3+xy^2)}{x^2+y^2}}{\partial x} = \frac{-x^2+y^2+2x^5+4x^3y^2+2xy^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \dfrac{y(-1+x^3+xy^2)}{x^2+y^2}}{\partial y} = \frac{-x^2+y^2+x^5+2x^3y^2+xy^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

Évidemment $\dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) \neq \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x,y)$.

3. Si $f(z)$ ne contient pas le terme $\overline{z}$, il en est de même de sa dérivée. Donc $f'(z)$ est aussi dérivable. D'où le résultat très important ; soit D un sous ensemble de $\mathbb{C}$.

$$f \text{ dérivable dans } D \iff f \text{ est indéfiniment dérivable dans } D.$$

On n'a pas un résultat analogue pour les fonctions réelles.

1.3 Fonctions harmoniques

Définition 1.3.1 *Soit φ une application de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. φ est dite de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω, (on note $\varphi \in \mathscr{C}^2(\Omega)$), si $\forall\,(x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}$ et $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$ existent et sont continues .*

remarque :

Pour les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$, le théorème de Schwarz assure l'égalité suivante :

$$\forall\,(x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}.$$

Définition 1.3.2 *Soit φ une application de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, on dit que φ est harmonique si :*

$$\forall\,(x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Notation :
La fonction $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$ est notée $\Delta\varphi$ et est appelée «laplacien» de φ.
Exemple :

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \longmapsto & \varphi(x,y) = e^x \cos y. \end{array}$$

Il est facile de vérifier que φ est de classe $\mathscr{C}^2$, dans $\Omega = \mathbb{R}^2$ On a alors :
$\varphi_x(x,y) = e^x \cos y \Longrightarrow \varphi_{x^2}(x,y) = e^x \cos y,$
et
$\varphi_y(x,y) = -e^x \sin y \Longrightarrow \varphi_{y^2}(x,y) = -e^x \cos y.$
D'où : $\Delta\varphi(x,y) = \varphi_{x^2}(x,y) + \varphi_{y^2}(x,y) = e^x \cos y - e^x \cos y = 0.$
Le laplacien de φ est bien nul ; c'est donc une fonction harmonique.

Théorème 1.3.1 *Soit f une fonction holomorphe et telle que $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$, alors les deux fonctions réelles P et Q sont harmoniques.*

Preuve :
La démonstration est une application directe des conditions de Cauchy-Riemann.

Définition 1.3.3 *Un couple de fonctions $P(x,y), Q(x,y)$ harmoniques dans un domaine D et y satisfaisant aux conditions de Cauchy-Riemann est appelé* **couple de fonctions harmoniques conjuguées**. *L'ordre que les fonctions occupent dans le couple est essentiel.*

Exercice 1 *Montrer que si $(P(x,y), Q(x,y))$ est un couple de de fonctions harmoniques conjuguées, il en est de même de $(Q(x,y), -P(x,y))$*

Preuve :
Il suffit d'écrire que $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ est holomorphe est donc on a :
$f(z) = i(-iP(x,y) + Q(x,y)) = i(Q(x,y) - iP(x,y)) = i(-if(z))$, il est évident que $-if$ est aussi holomorphe.
Le théorème suivant est très important, on le cite sans donner sa démonstration.

Théorème 1.3.2 *Soit P une fonction harmonique de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, alors il existe une fonction f holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $\mathscr{R}e(f) = P$.(Ou $\mathscr{I}m(f) = P$).*

Remarque :
Ça peut être $\mathbb{C}$ ou une partie de $\mathbb{C}$; tout dépend du domaine de définition de P.
Exemples :
•1.
Trouver une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $\mathscr{R}e(f(z)) = P(x,y) = \cos x \operatorname{ch} y$.
Solution :
Le domaine de définition de P est $\mathbb{R}^2$. Vérifions que $P(x,y) = \cos x \operatorname{ch} y$ est une fonction harmonique. On a :

$$\begin{cases} P'_x(x,y) = -\sin x \operatorname{ch} y, & P''_{x^2} = -\cos x \operatorname{ch} y \\ P'_y(x,y) = \cos x \operatorname{sh} y, & P''_{y^2} = \cos x \operatorname{ch} y \end{cases} \Longrightarrow \quad P''_{x^2} + P''_{y^2} = 0.$$

Posons $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$, f holomorphe entraîne que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = -\sin x \operatorname{ch} y & (1) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \cos x \operatorname{sh} y & (2) \end{cases}$$

De l'équation (1) on tire : $Q(x, y) = -\int \sin x \operatorname{ch} y \, dy = -\sin x \operatorname{sh} y + \varphi(x)$. φ dépend seulement de x.
De (2) on a $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = -\cos x \operatorname{sh} y = (-\sin x \operatorname{sh} y + \varphi(x))'_x = -\cos x \operatorname{sh} y + \varphi'(x)$ d'où l'on tire : $\varphi'(x) = 0$ et donc $\varphi(x) = C^{st}$. D'où : $Q(x, y) = -\sin x \operatorname{sh} y + C^{st}$.
Finalement on trouve :
$f(z) = \cos x \operatorname{ch} y + i(-\sin x \operatorname{sh} y + C^{st}) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y + iC^{st} = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y + k$. k est un imaginaire pur.

Remarque 1.3.1 *Si k est une constante quelconque, par exemple $k = a + ib$, alors la partie réelle de f serait* $\cos x \operatorname{ch} y + a$*, ce qui n'est pas le cas.*